Desafio 2- Diferenciais finitos justificando ideias do Cálculo

Instruções

- O desafio se encerra dia 01/12 às 16h. Todas as soluções devem ser entregues até essa hora, fisicamente ou pelo e-mail teorema.de.green@gmail.com.
- A solução deve conter na primeira página nome e RA do estudante, e **a lista dos itens que devem ser considerados**. A solução de cada item deve ter o número do item a ser resolvido.
- As questões têm um indicador de dificuldade, denotado pelo número de * junto à questão.
- Soluções válidas para qualquer item devem ter demonstrações rigorosas e completas. Se um exemplo for apresentado, deve-se demonstrar sua validade.
- Para uma solução de um item, **é permitido assumir os itens anteriores.** Todos os teoremas das aulas, das listas e dos arquivos adicionais podem ser utilizados sem prova. Pode-se usar também sem demonstração resultados básicos sobre funções elementares, fórmulas de trigonometria, e proposições básicas de aritmética e teoria dos conjuntos. **Qualquer outro resultado sem demonstração deverá ser enunciado e será julgado separadamente. Não será permitido o uso de resultados sobre derivadas de funções.**
- A pontuação será de até 1,5 ponto, cumulativo com a nota da terceira prova. Cada item vale 0,1 e um adicional de 0,2 para qualquer submissão com pelo menos um problema (*) correto. (Adicional de 0,1 pela questão de crédito extra)

Problemas

Definição: Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e um real positivo $h \in \mathbb{R}_+^*$, defina o funcional Δ_h como o que leva f em $\Delta_h f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

1) Suponha que f é contínua; dado $h > 0$, mostre que $\Delta_h f$ é contínua. Vale o resultado para continuidade uniforme?

2) Mostre que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Delta_a \Delta_b f = \Delta_b \Delta_a f$.

3) Dado $h > 0$ real e $k \in \mathbb{N}$, defina a função $x^{k,h} = x \cdot (x-h) \dots (x-[k-1]h)$. Compute $\Delta_h x^{k,h}$. Compute também $\Delta_h \frac{1}{x^{k,h}}$.

4) Dado $h > 0$ real, escreva $\Delta_h(f \cdot g)$ em termos de $\Delta_h f$ e $\Delta_h g$. (Regra do Produto para diferenciais finitos)

5) Fixado L, suponha que $\forall 0 < h < L$, $\Delta_h f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

6) (*) Fixado $h > 0$ real, construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-monótona com $\Delta_h f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Construa também uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante com $\Delta_h f = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7) (*) Dado $h > 0$, resolva a equação funcional $\Delta_h f = f$. Ou seja, encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a equação acima.

Definição: Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e um real positivo $h \in \mathbb{R}_+^*$, defina o funcional $S_{h,n} f$ como $S_{h,n} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} h \cdot f(x + ih)$.

8) Dado um real positivo $h \in \mathbb{R}_+^*$, prove que $\Delta_h S_{h,n-1} f = f(x+nh) - f(x) = S_{h,n-1} \Delta_h f$. (Teorema Fundamental do Cálculo versão finita)

9) Demonstre o Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

. (Aqui $\binom{a}{b} \stackrel{def}{=} \frac{a!}{b!(a-b)!}$) Você pode usar indução ou argumentos combinatórios, mas a prova algébrica é a mais fácil dada a preparação.

10) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada; fixe $A > 0$ e defina $\lfloor x \rfloor$ como o maior inteiro menor ou igual a x (equivalentemente, é o resultado de arredondar x para baixo). Prove que existe o limite $\lim_{n \to \infty} S_{2^{-n}, \lfloor 2^n \cdot A \rfloor} f$.

11) (*) Dados $h > 0$ real e $n \in \mathbb{N}$, prove que se $x > h$ então as desigualdades $\frac{h}{2}(\sqrt{x+nh} - \sqrt{x-h}) < S_{h,n} \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{h}{2}(\sqrt{x+(n+1)h} - \sqrt{x})$ valem. Compare com o resultado de $\Delta_h \sqrt{x}$.

12) (*) Escreva uma fórmula fechada para $S_{h,n} \sin x$.

(Queremos uma expressão que não contenha somas de tamanho arbitrário. Ou seja, na solução o somatório ou forma equivalente deve ser eliminado)

13) (**) Prove que $\log(x + nh) - \log x < S_{h,n-1} \frac{1}{x} < \log(x + [n-1]h) - \log(x - h)$ para x suficientemente grande e $h > 0, n \in \mathbb{N}$ fixos. (Você pode usar as estimativas $(1 + \frac{1}{x})^x < e$, $\forall x > 0$, e $(1 + \frac{1}{x})^{x+1} > e$, $\forall x > 1$ sem demonstração.)

Questão Extra

Para completude: demonstre as desigualdades usadas no problema 13 (Sem usar derivadas; não podemos usar derivadas para provar um resultado sobre derivadas)

14) (***) Demonstre $(1+\frac{1}{x})^x < e$, $\forall x > 0$, e $(1+\frac{1}{x})^{x+1} > e$, $\forall x > 1$.

Comentários:

A questão 1 é um contra-exemplo interessante para continuidade de limites de funções (pois existem funções contínuas com derivada não- contínua). A questão 3 sugere a "Regra do Tombo", e a questão 5 é uma versão mais fraca do resultado $f' \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv C$.

A questão 7 motiva a definição do limite exponencial fundamental. As questões 8 e 9 exemplificam uma versão análoga de um teorema contínuo utilizado de forma discreta, uma ideia que permite dar utilidade a resultados e teoremas sobre o infinito.

As questões 11, 12 e 13 tratam de justificar as integrais de alguns tipos de função.

Mas o importante da questão 13 é que a soma no meio, para $h = 1$, é o $n-$ésimo número harmônico H_n, uma soma importante em matemática para a qual conseguimos uma estimativa precisa, e de quebra uma demonstração que a soma dos inversos diverge.